11,12-րդ դասարան

Մաթեմատիկա

1. $\begin{cases}\cos 2x-2tg^4y=-4\\ \sin x+\dfrac{1}{\cos^2 y}=3\end{cases}$ $\begin{cases}1-2\sin^2 x-2tg^4y=-4\\ \sin x+1+tg^2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin^2 x+2tg^4y=5\\ \sin x+tg^2y=2\end{cases}$

Թող $\sin x=a, |a|\le 1; tg^2y=b, b\ge 0$

Համակարգն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$\begin{cases}2a^2+2b^2=5\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a^2+2b^2=5\\ b=2-a\end{cases}$

$2a^2+2(2-a)^2=5;\ \ 2a^2+8-8a+2a^2=5;\ \ 4a^2-8a+3=0$

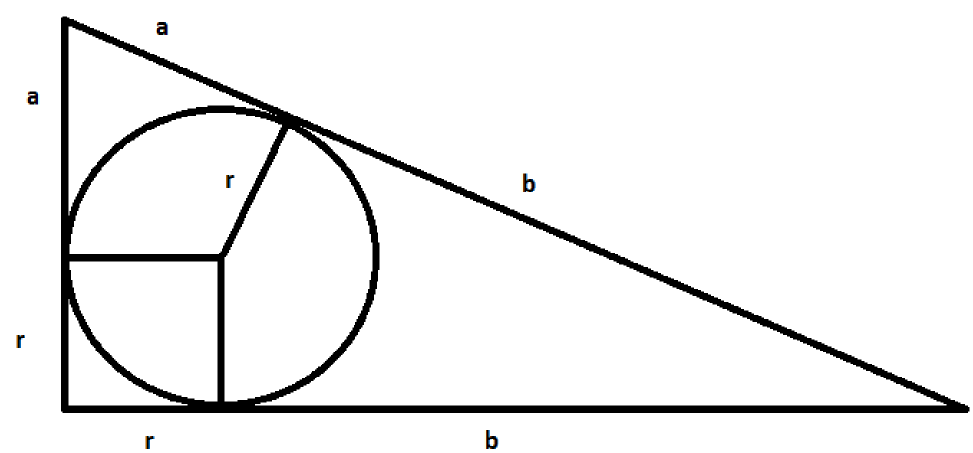
$\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3}{2}\\ a=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ $a=\dfrac{3}{2}$ չի բավարարում, քանի որ $|a|\le 1$: Հետևաբար $a=\dfrac{1}{2}; b=2-a=\dfrac{3}{2}$.

Հաշվի առնելով տիրույթները, ստանում ենք $x=\dfrac{\pi}{6}$;

$tg^2y=\dfrac{3}{2}; tgy=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\quad y=\pm arctg\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\pi n,\ \ n\in Z$

Հաշվի առնելով տիրույթը $y=\pi-arctg\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

2.



$(a+b)^2=(a+r)^2+(b+r)^2\Rightarrow ab=r^2+r(a+b)$

$$S=\frac{(a+r)(b+r)}{2}=\frac{ab+r^2+r(a+b)}{2}=ab$$

3. Նշանակենք $a_n=\frac{n^2}{1{,}001^n}$: Գտնենք հաջորդականության հարևան անդամների հարաբերությունը:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1{,}001^n\cdot(n+1)^2}{1{,}001^{n+1}\cdot n^2}=\frac{1000}{1001}\cdot\frac{n^2+2n+1}{n^2}$$

Համեմատենք այս հարաբերությունը 1 թվի հետ.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1\Leftrightarrow 1000\left(n^2+2n+1\right)>1001n^2\Leftrightarrow 2000n+1000>n^2$$

Այսինքն՝ $n(n-2000)<1000$: Ակնհայտ է, որ այն տեղի է ունի $n\le 2000$ համար և տեղի չունի մնացած n-երի համար:

Դա նշանակում է, որ

$$a_1<a_2<\ldots<a_{2000}<a_{2001}>a_{2002}>a_{2003}>\ldots$$

Այդ պատճառով a_n-ը ամենամեծ արժեքը կնդունի $n=2001$-ի ժամանակ:

4. Վերցնենք մեկ փայտ և այն բաժանենք $(n+1)$ մասի (n-ը կհամարենք կենտ) և կենթադրենք, որ փայտը կարող է կոտրվել միայն բաժանման կետերում (դրանք n հատ են), և ցանկացած կետում նույն հեշտությամբ:

Հավանականությունը կոտրելու փայտը մեկ կետում հավասար է $(n-1)/n$, իսկ հավանականությունը կոտրելու այն n կետում հավասար է $[(n-1)/n]^n=(1-1/n)^n$:

Հետևաբար, հավանականությունը, որ ոչ մի փայտ չի կոտրվի մեջտեղից հավասար է $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)^n$, և այսպիսով խնդրի պատասխանը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝ փնտրվող հավանականությունը (որ գոնե մի փայտ կկոտրվի մեջտեղից) հավասար է $1-\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)^n$: Այսինքն՝ խնդրի պատասխանը գտնելու համար հարկավոր է հաշվել այդ սահմանը:

Օգտվենք այն բանից, որ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$

$$\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+(-1/n))^n=\lim_{n\to\infty}\left((1+(-1/n))^{-n}\right)^{-1}=1/e\approx 0{,}37$$

Այսպիսով՝ $1-\frac{1}{e}\approx 0{,}63$

Ֆիզիկա

1. Պետք է հաշվել քարշի ուժի կատարած աշխատանքը, որը հավասար է

$$A = F_{ք} \cdot s$$

Սայլակի վրա գործում են հետևյալ ուժերը՝ $F_{ծ}$ –ծանրության ուժը, $F_{շ}$ –շփման ուժը, $F_{ք}$ –քարշի ուժը և N-հակազդեցության ուժը:

Գրենք Նյուտոնի երկրորդ օրենքը x և y պրոյեկցիաներում.

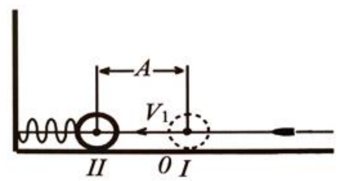
$$N = mg\cos\alpha \text{ (x)}$$

$$F_{ք} - mg\sin\alpha - F_{շ} = ma \text{ (y)}$$

$$F_{շ} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

Որտեղից էլ ստանում ենք $A = m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)s \approx 900\,կՋ$

2. Հարվածելու պահին փամփուշտը գնդին հաղորդում է կինետիկ էներգիա, որի հետևանքով գունդը սկսում է սեղմել զսպանակը: Զսպանակը կսեղմվի այնքան ժամանակ, մինչ ամբողջ կինետիկ էներգիան չի վերածվի դեֆորմացված զսպանակի պոտենցիալ էներգիայի: Այդ ժամանակ գնդի կինետիկ էներգիան կհավասարվի զրոյի, իսկ պոտենցիալ էներգիան կընդունի իր մեծագույն արժեքը, իսկ գնդի հավասարակշռության դիրքից շեղումը հավասար կլինի ամպլիտուդին: Ապա պրոցեսը կգնա հակառակ ընթացքով՝ զսպանակը կսկսի ընդունել իր նախկին տեսքը, պոտենցիալ էներգիան կնվազի, իսկ կինետիկը կսկսի աճել, և հավասարակշռության (O) կետում առաջինը կդառնա զրո, իսկ երկրորդը կընդունի իր մեծագույն արժեքը:



Տատանման ամպլիտուդը գտնելու համար օգտվենք էներգիայի պահպանման օրենքից: Առաջին դիրքում էներգիան կլինի

$$E_1 = \frac{(M+m)v_1^2}{2}$$

Իսկ երկրորդում՝

$$E_2 = \frac{kA^2}{2}$$

Ապա $E_2 - E_1 = 0$, կամ

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{(M+m)v_1^2}{2} = 0 \quad (1)$$

քանի որ արտաքին ուժերը համակարգի վրա աշխատանք չեն կատարում:

v_1 արագությունը գտնում ենք իմպուլսի պահպանման օրենքից

$$mv_0 = (m + M)v_1 \qquad (2)$$

Գնդի վրա ազդող ետ վերադարձնող ուժը որոշվում է հետևյալ հավասարումով.

$$F = (m + M)\omega^2 x \qquad (3),$$

որտեղ ω-ն անկյունային հաճախությունն է:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (4)$$

Այդ նույն ուժը կարելի է որոշել հետևյալ կերպ.

$$F = kx \qquad (5),$$

որտեղ k-ն զսպանակի առաձգականության գործակիցն է:

(1)-(5) հավասարումները ամբողջովին նկարագրում են երևույթը:

Լուծելով (1) և (2) հավասարումները ստանում ենք՝

$$A = \frac{mv_0}{m + M}\sqrt{\frac{m + M}{k}}$$

(3)-(5) հավասարումներից գտնում ենք՝

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}}$$

3. Գոլորշու սառեցման ժամանակ մոլեկուլների ներքին էներգիան փոքրանում է: Ներքին էներգիան նվազում է $c_1m_1(t_1 - t_2)$-ով, երբ ջերմաստիճանը նվազում է t_1-ից մինչև կոնդեսացիայի $t_2 = 100$ °C ջերմաստիճանը, իսկ երբ գոլորշին կոնդեսանում է, ներքին էներգիան փոքրանում է rm_1 –ով: Իսկ հետագա սառեցման ընթացքում $c_2m_1(t_2 - \theta)$-ով, որտեղ θ-ն վերջնական ջերմաստիճանն է: Վերջնական արդյունքում տաք մարմնի ներքին էներգիան նվազում է

$$\Delta U_1 = c_1m_1(t_1 - t_2) + rm_1 + c_2m_1(t_2 - \theta) = Q_{տալ}\text{-ով:}$$

Այս էներգիայի հաշվին կալորիմետրը տաքանում է սկզբնական t_1'-ից մինչև վերջնական θ ջերմաստիճանը, և այսպիսով նրա ներքին էներգիան աճում է $c_3m_2(\theta - t_1')$-ով: Բացի այդ, էներգիայի մի մասը կծախսվի m_3 զանգվածով սառույցի տաքացման վրա: Սառույցի մոլեկուլների էներգիան աճում է: Սկզբնական t_1' ջերմաստիճանից մինչև հալման $t_0 = 0$ °C ջերմաստիճանը տաքանալիս, ներքին էներգիան աճում է $c_4m_3(t_0 - t_1')$-ով, իսկ հալման պրոցեսի ընթացքում՝ λm_3-ով և հետագայում առաջացած ջրի տաքացման հետևանքով՝ $c_2m_3(\theta - t_0)$-ով:

Վերջնական արդյունքում, սառը մարմինների ներքին էներգիան աճում է

$$\Delta U_2 = c_3 m_2(\theta - t_1') + c_4 m_3(t_0 - t_1') + \lambda m_3 + c_2 m_3(\theta - t_0)\text{-ով:}$$

Եվ հետևաբար ջերմային հավասարակշռության հավասարումը կունենա հետևյալ տեսքը.

$$c_1 m_1(t_1 - t_2) + r m_1 + c_2 m_1(t_2 - \theta) = c_3 m_2(\theta - t_1') + c_4 m_3(t_0 - t_1') + \lambda m_3 + c_2 m_3(\theta - t_0)$$

Լուծելով հավասարումը θ-ի նկատմամբ, կստանանք.

$$\theta = \frac{c_1 m_1(t_1 - t_2) + r m_1 + c_2 m_1 t_2 + c_3 m_2 t_1' + c_2 m_3 t_0 - c_4 m_3(t_0 - t_1') + \lambda m_3}{c_2 m_1 + c_3 m_2 + c_2 m_3}$$

4. Երբ բաժակը դնում են տաք ջրի մեջ, ապա տաքացող օդի (և գոլորշու) ճնշումը մեծանում է, զգալի կերպով փոքրացնելով սեղմող ուժը, հետևաբար շփման ուժը նույնպես փոքրանում է, որը բերում է բաժակի սահելուն: